Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2013/2014. 4. feladatsor**
7.-8. évfolyam

Közös osztó, közös többszörös

Ebben a feladatsorban, ha azt mondjuk „szám”, akkor mindig egy pozitív egész számra fogunk gondolni. Két számnak sok-sok közös osztója, többszöröse lehet. A közös osztók közül kitüntetett szerepe van a legnagyobbnak, a közös többszörösök közül pedig a legkisebbnek. Az egyikre a törtek egyszerűsítésénél, a másikra a közös nevező megkeresésénél van szükségünk. Két szám legnagyobb közös osztóját kerek zárójellel (a,b), legkisebb közös többszörösét szögletes zárójellel $[a,b]$ fogjuk jelölni.
Mit is jelent az, ha két szám legnagyobb közös osztója a 4? Mindkét szám osztható 4-gyel, azaz mindkettő 4 egy többszöröse, vagyis az egyik $4 \cdot k$ a másik $4 \cdot l$ alakban írható föl, k és l pedig egy-egy pozitív egész szám, melyek már relatív prímek, azaz nincs egytől különböző közös osztójuk.

Mintapéldák

1.) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével?

A szereplő prímek legmagasabb hatványait gyűjtsük össze, azaz a keresett szám a:
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

2.) Melyek azok a legkisebb a, b, c természetes számok, amelyekre:
$(a,b) = 4$, $(b,c) = 6$, $(c,a) = 10$?

Ha egy szám osztható 4-gyel és 10-zel, akkor osztható 20-szal is. Az már nem feltétlen igaz, hogy 40-nel, hisz ott a 20, mint ellenpélda. Tehát a osztható 20-szal, azaz $a = 20 \cdot k$. *A b szám osztható 4-gyel és 6-tal, azaz 12-vel, vagyis* $b = 12 \cdot m$, *a c szám osztható 6-tal és 10-zel, azaz 30-cal, vagyis* $c = 30 \cdot n$. *(k, m, n pozitív egész számokat jelölnek.) A feladat a legkisebb olyan természetes számokat keresi, melyre a feltételek teljesülnek, vagyis* $a = 20$, $b = 12$ *és* $c = 30$.

3.) Az a és b pozitív egészekre $(a,b) = 8$ és $a + b = 80$. Hány ilyen számpár van?

Mivel mindkét szám osztható 8-cal, fel lehet írni őket mint 8 többszöröseit, azaz $a = 8 \cdot k$. *és* $b = 8 \cdot l$, *ahol k és l pozitív egész számokat jelölnek. Ha ezt beírjuk, akkor* $8k + 8l = 8(k + l) = 80$. *Ez pedig azt jelenti, hogy k és l összege 10. Már csak azt kell összeszámolnunk, hányféleképpen tudjuk a 10-et két szám összegeként fölírni: 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5, 6 + 4, 7 + 3, 8 + 2, 9 + 1, azaz 9 ilyen számpár van.*

4.) 10 pozitív egész szám összege 1001. Határozd meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét!

Oszthatósági feladatok megoldásában gyakran segít a prímtényezős felbontás. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1001 = 11 \cdot 91$. *A harmadik feladat megoldását követve, a legnagyobb közös osztót ki lehet emelni a bal oldali összegből, és így* $d(k_1 + k_2 + \cdots + k_{10} = 11 \cdot 91$, *ahol d jelöli a legnagyobb közös osztót. Mivel d lehetséges legnagyobb értékét keressük, így a 91 jön szóba, s ez meg is valósítható, a 11-et ugyanis fel tudjuk írni 10 szám összegeként: 9 db 1 és 1 db 2. Vagyis a keresett 10 szám: 9-szer vesszük a 91 -et és 1-szer a 182-őt.*

Gyakorló feladatok

1.) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható a 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 számok mindegyikével?

2.) Hány olyan 100-nál kisebb n természetes szám van, amelyre (n,72) = 6 és (n,35) = 5 teljesül?

3.) Add meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyek összege 192 és legnagyobb közös osztója 24? Határozd meg az egyes számpárok esetén a legkisebb közös többszöröst!

4.) 10 különböző pozitív egész szám összege 1001. Határozd meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét!

Kitűzött feladatok

1.) Hány olyan pozitív számokból alkotott számpár van, amelyben szereplő két számnak az összege 216, a legnagyobb közös osztójuk pedig 24? (A számpárban a számok sorrendje nem számít.)

2.) Három különböző pozitív egész szám összege 100. A legnagyobb és a legkisebb szám különbsége 66, és a legnagyobb szám többszöröse a legkisebb számnak. Hány ilyen számhármas van?

3.) Három különböző pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse 2014. Mi lehet legnagyobb közös osztójuknak legnagyobb értéke?

4.) Négy pozitív egész szám összege 1995. Mennyi a négy szám legkisebb közös többszörösének legkisebb értéke?

Beküldési határidő: **2014. 03. 03.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.